**Формула повної ймовірності**

Одним із ефективних методів підрахунку імовірності є формула повної імовірності, з допомогою якої розв’язується широке коло задач.

Нехай подія А може відбуватися лише із однією попарно несумісних подій Н1…Hn, (Hi\*Hj=V) при і ≠ j, тобто іншими словами покладемо: A=H1A+H2A+…+HnA. Домовимося називати події H1,…,Hn по відношенню до А гіпотезами. Оскільки H1…Hn попарно несуміжні, то і H1A,…,HnA – також попарно несумісні. За правилом додавання ймовірностей для несумісних подій:

(5)

Формула (5) читається так: імовірність події А дорівнює сумі добутків імовірностей гіпотез на умовні імовірності цієї події по кожній із гіпотез.

***Доведення***. По умові подія А може наступити лише разом із однією із подій Н1 , Н2 , … , Нn , отже можна покласти

А = Н1\*А + Н2\*А + … + Нn\*А.

Так як Н1 , Н2 , … , Нn попарно несумісні, то несумісні і події Н1\*А, Н2\*А, … , Нn\*А. За правилом додавання імовірностей для несумісних подій (2), знайдемо:

P(A) = P(Н1\*А) + P(Н2\*А) + … + P(Нn\*А )=

За правилом множення (4) одержимо:

= P(Н1)\*P(А/ Н1)+ … + P(Нn)\*P(А/ Нn)

потрібну нам рівність (5).

Ця формула називається формулою повної ймовірності. Ця формула є однією з найосновніших елементарних формул теорії імовірності. Вона є результатом сукупного застосування правил додавання і множення ймовірностей. Цю формулу часто називають формулою середньої ймовірності і виражають в процентах.

**Приклад1**. Дано 6 урн з кульками:

в трьох із них 3 білі і 2 чорні кульки;

в двох урнах 7 білих і три чорних;

в одній урні 1 біла і 4 чорних кульки.

З наугад вибраної урни витягують навмання одну кульку. Яка імовірність того, що вийнята кулька буде білою?

***Розв’язок:***

Нехай подія А полягає в тому, що з урни вийнято білу кульку.

H1 полягає в тому, що вибрано урну з 3 білими і 2 чорними кульками.

H2 ----------------------||----------------------7б і 3ч------------------------||-------------------

Н3-----------------------||----------------------1б і 4ч------------------------||-------------------

Очевидно, що А=H1A+H2A+H3A – попарно несуміжні. Тоді має місце формула:

**Приклад 2*.*** Дано три урни з кульками: в 1-й із них 5 білих і 3 чорних кульки, в 2-й – 4 білих і 4 чорних кульки, в 3-й – 8 білих. З наугад вибраної урни виймають навмання одну кульку. Яка імовірність того, що вийнята кулька буде чорна?

***Розв’язок:***

Нехай подія А полягає в тому, що з урни вийнято чорну кульку. Н1 полягає в тому, що вибрано 1-у урну. Н2 полягає в тому, що вибрано 2-у урну. Н3 полягає в тому, що вибрано 3-у урну.

Очевидно, що

А = Н1\*А + Н2\*А + Н3\*А – попарно несумісні, тоді має місце

P(А) = P(Н1)\*P(А/ Н1) + P(Н2)\*P(А/ Н2) + P(Н3)\*P(А/ Н3) =

Так як є одинакові шанси вибрати будь-яку із урн, то

P(Н1) = P(Н2) = P(Н3) = 1/3

= 1/3 \* 3/8 + 1/3 \* 4/8 + 1/3 \* 0/8 = 7/24. (З 24 урн взяти по кулі з кожної, то в середньому 7 чорних куль буде)

В наведеному прикладі, як і в інших задачах на формулу повної імовірності розглянутий дослід можна представити як такий, що проходить в два етапи:

1. Гіпотези Н1, Н2 , … , Нn вичерпують всі можливі припущення відносно виходу 1-го етапу;
2. Подія А є один із можливих виходів 2-го етапу.

**Формули імовірностей гіпотез**

Розглянемо імовірність суміщення А\*HK (k=). Потрібно знайти імовірність події HK , при умові, що подія А відбулася.

За правилом множення імовірностей (4) маємо:

Звідси (при А≠V, тобто Р(А)≠0) імовірність того, що подія А відбулась в умовах HK буде мати вигляд:

(використовуючи формулу повної ймовірності, отримаємо):

(Формули Байєса) (6)

Формула (6) виражає імовірність того, що подія А настала в умовах HK .

Очевидно, що .

Формули (6) вивів вперше Томас Байєс (Bayes, 1702-1761 рр-англійський математик) у 1763 році, тому вони називаються формулами Байєса.

Їх застосовуємо при розв’язуванні задач, які вкладаються в наступну схему (тобто загальні застосування цих формул до розв’язку практичних задач такі):

Нехай деяка масова випадкова подія А може відбуватися в різних умовах, і нехай відносно цих умов можна зробити n припущень H1, H2 ,…, Hn . Нехай будуть відомі їх ймовірності: P(H1), … , P(Hn), а також імовірності події А в умовах кожної з гіпотез: P(A/H1), … , P(A/Hn).

Проводиться випадковий експеримент, тобто реалізується ситуація, при якій може відбутись подія А. Припустимо, що в результаті цього експерименту подія А відбулась. Це повинно викликати переоцінку гіпотез. Цю переоцінку дають формули Байєса. Тому вони ще називаються формулами імовірності гіпотез.

У формулах Байєса виступають два типи імовірності:

1. Імовірності, відомі до експерименту (апріорні (а Priori) – наперед відомі). Наприклад, P(Hn), P(A/Hi)
2. Імовірності, обчислені після експерименту (апостеріорні (а Posteriori) – після спроби).

**Приклад 1**

В умовах попереднього прикладу стало відомо, що вийнята куля – чорна (подія А відбулась). Яка імовірність, що її взято з 2 урни в якій 4 білі і 4 чорні, тобто P(H2 /A) - ?

За формулами Байєса:

P(H2/A) = =

(На кожні 7випадків, коли в руках чорна кулька, в середньому – 4 випадки – взятих з урни, де 4 б. і 4 ч.).

**Незалежні події**

***Означення.***  Кажуть, що масова вип. подія А не залежить від масової вип. події В, якщо умовна імов. події А при умові, що В відбулась, дор. безумовній імов. подіїА:  
 .

Із правила множення імовірності виходить, що коли А незалежить від В, то В не залежить від А, тобто незалежність подій взаємна.

Для двох незалежних подій дуже просто формується правило множення імовірності:

***Означення.*** Імовірність суміщення двох незалежних подій = добутку імовірності цих подій:

Останнє співвідношення (7) можна прийняти за означення незалежності подій.

**Твердження**: Якщо подія А не залежить від події В, то вона не залежить також від події .

**Приклад 1**. Кидають два одинакових кубики. 1.) Яка імовірність того, що на обидвох кубиках випаде по 6 очок? 2.) Яка імовірність того, що на першому кубику випаде одне очко, а на другому - парне число очок?

1. Нехай подія А полягає в тому, що на першому кубику випаде 6 очок, а подія В у тому що на другому кубику випаде 6 очок. Очевидно, що випадання граней на двох не пов’заних кубиках між собою незалежні. Тому імовірність випадання на обидвох кубиках по шість очок рівна згідно (7):

1. Нехай подія С полягає в тому. Що на першому кубику випаде одне очко, а подія D у тому що на другому кубику випаде парне число очок. Імовірність суміщення, згідно формули (7) рівна:

**Приклад 2**. Кидають три монети. Нехай подія а полягає в тому, що випаде щонайбільше (максимум) 1 решка, а подія В - і герб і решка. Показати, що події А і В - незалежні.

Справді, всіх елементарних подій - вісім:

Отже

Отже співвідношення (7) виконується, тому події А і В – незалежні

**Незалежність в сукупності**

***Означення.***  Кажуть, що випадкові події – незалежні між собою в сукупності, якщо для довільної групи з них

виконується співвідношення

(8)

Число всіх співвідношень виду (8) рівне . Зокрема, при *m = 2*, маємо одне співвідношення (7), при *m = 3*, маємо чотири співвідношення

(9)

При *m = 4,* буде 11 співвідношень.

Зауважимо, що події можуть бути попарно незалежні, а в сукупності ні.

**Приклад 1**

Грані однорідного тетраедра розмальовані: перша на біло, друга на зелено, третя на чорно, четверта на біло-зелено-чорні смуги. Показати що події попарно незалежні, а сукупності ні.

Нехай подія *A (B, C)* полягає в тому, що киданні тетраедра, випаде білий (зелений, чорний) колір.

Перші з трьох співвідношень (9) виконуються, а четверте – ні. Події *A, B, C* тільки попарно незалежні і в сукупності не є залежні.

**Залежні події**

Кажуть, що випадково подія *A* залежить від випадкової події *B*, якщо

З правил множення імовірностей випливає тоді, що

За міру залежності події *A* від події *B* приймають різницю умов імовірностей події *A* при умові *B* та , яку позначають через і називають коефіцієнтом регресії події *A* відносно події *B*:

Коефіцієнт регресії події *B* відносно події *A* рівний

(10).

З рівності (9) та (10) видно, що обидва коефіцієнти регресії по абсолютній величині не більші від одиниці.

**Ймовірність появи хоча би однієї події**

**Теорема**. Ймовірність появи хоча би однієї події , незалежних в сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій :

P(A)=1- *P*(*P*(*P*( , або P(A) = 1 - …

**Доведення.** Нехай в результаті спроб можуть появитися *m* подій, незалежних в сукупності, або лише деякі з них і причому ймовірності появи кожної з подій відомі.

Позначимо через А подію, яка полягає в появі хоча би одної з подій Події A і протилежні, отже ці події утворюють повну систему подій і в сумі дають вірогідну подію

*+=1*

Звідси використовуючи теорему множення для попарно несумісних подій і одержимо:

*P*(A) = 1-*P*(*P*(*P*(,

або

*P*(A) =1 - .

**Наслідок.**

Якщо події мають однакову ймовірність, рівну *p*, то ймовірністі появи хоча би однієї із цих подій рівна

*P*(A) = 1 - , де *q*=1-*p.*